Behavior of harmonic maps into spheres around their isolated singular points (Variational Problems and Related Topics)

中島, 徹

数理解析研究所講究録 1237 巻 2001 年 194-207

Behavior of harmonic maps into spheres around their isolated singular points.

東北大大学院理学研究科数学専攻 D3 中島徹 (Tôru Nakajima)
Mathematical Institute of Tohoku University

1 Definitions and examples

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ を有界領域とし, 写像のクラス $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ を,

$$W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k) = \{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^{k+1}) | \ |u(x)| = 1 \text{ (a.e.)}\}$$

エネルギー汎関数 $\mathbf{E} : W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

で定める.

Definition 1 (energy minimizing map, harmonic map)
(1) u が energy minimizing map であるとは次を満すこととする.

$$\mathbf{E}(u) \leq \mathbf{E}(v) \quad \forall\, v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}) \text{ with } u - v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}).$$

(2) u が harmonic map であるとは u が $\mathbf{E}$ の Euler-Lagrange 方程式

$$\int_\Omega \{\langle \nabla u, \nabla \psi \rangle - |\nabla u|^2 u \cdot \psi\} \, dx = 0 \quad \forall \psi \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

を満たすこととする. 言い変えると次を満すことである.

$$\Delta u + |\nabla u|^2 u = 0 \ \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Remark 1 energy minimizing map 及び harmonic map は微分幾何学における重要な研究対象であり, 一般には 2 つの Riemann 多様体間の写像について定義されるものである. ここで一般の場合の harmonic map の定義を与えておく. (ただし, 以下では $M = \mathbb{S}^n$, $N = \mathbb{S}^k$ ときしか用いない.)

以下, (M,g) を n 次元 C^∞ 級 (境界付き) compact Riemann 多様体, (N,h) を k 次元 C^∞ 級 compact Riemann 多様体として, N を十分高い Euclid 空間 $\mathbb{R}^l$ に isometric に埋めこんでおく.

Definition 2 (harmonic map 2)
(1)$\mathbf{E}: W^{1,2}(M,N) \to \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{E}(u) = \frac{1}{2}\int_M |du|^2 \, vol_M$$

と, 定める. ここで, vol_M は M の volume form とする.
(2) $u \in W^{1,2}(M,N)$ が 調和写像 であるとは次を満すこととする.

$$\int_M \{\langle du, d\psi\rangle - A_u^N(du,du)\cdot\psi\}\,\mathrm{vol}_M = 0 \quad \forall\psi \in W_0^{1,2}\cap L^\infty(M,\mathbb{R}^l)$$

ここで, A^N は N の第2基本形式である. 言い変えると次を満すことである.

$$\Delta_g u + A_u^N(du,du) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(M,\mathbb{R}^l)$$

ここで Δ_g は M 上の Laplacian である.

Remark 2 (Harmonic maps between spheres)
球面間の harmonic map の方程式は次のようになる.

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} u + |\nabla_{\mathbb{S}^n} u|^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{S}^n$$

よって、もし $u \in C^\infty(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^k)$ $(n \geq 2)$ が harmonic map であれば、$u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^{n+1},\mathbb{S}^k)$ を

$$\overline{u}(x) = u\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{B}^{n+1}\setminus\{0\}$$

で定めると、u は $\mathbb{B}^{n+1}$ から $\mathbb{S}^k$ への harmonic map となる。

値域を球面とする調和写像の研究を行うのには次の 2 つの理由がある.
(1) 球面は調和写像の理論において未解決なことが多い正曲率の Riemann 多様体として最も簡単 (と, 思われる) なものである.
(2) 液晶や非線型σモデルという物理的な問題に関係している.

以下で行うことは, harmonic map の孤立特異点の近傍での挙動を調べることである. そのために, section 2 では harmonic map の満たす性質について述べ, section 3 において挙動を調べる指標となる写像度について解説する.

2 Properties of energy minimizing map and harmonic map

まず, 定義よりすぐにわかることから述べることにする.

Definition 3 (scaled map)
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^l)$ として, $\mathbb{B}^n_r(p) \subset \Omega$ とする. このとき, $u_{p,r} \in W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^l)$ を次で定める.

$$u_{p,r}(x) = u(p + rx) \quad x \in \mathbb{B}$$

Property 1 energy minimizing map, (harmonic map) は scaling されても energy minimizing map (harmonic map) である. つまり, 次がいえる.
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ が energy minimizing map (harmonic map) ならば, $u_{p,r} \in W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^k)$ は energy minimizing map (harmonic map) である.

energy minimizing map は一般には連続ではない. 実際 $n \geq 3$ ならば n 次元球体 $\mathbb{B}^n$ から $\mathbb{S}^{n-1}$ への写像 $x/|x|$ は energy minimizing map となる [11] が, これは明かに原点において連続ではない. (一方, 2 次元領域から, k 次元 compact Riemann 多様体 N への energy minimizing map 及び harmonic map が C^∞ になることが, Bthuel, Evans, Hèlein, Morrey らによって示されている. [2], [6], [10], [13]) そこで我々は energy minimizing map の不連続点の集合 (これを特異集合と呼ぶ) に注目する. (但し以下では, 境界での不連続点は扱わないので, 境界の近傍では常に連続性を仮定する. 境界での正則性については [19], [24], [28] を参照。) ここで, Reg(u), Sing(u) を次で定める.

$$\mathrm{Reg}(u) = \{x \in \Omega | u \text{ is continuous at } x\} \quad \mathrm{Sing}(u) = \Omega - \mathrm{Reg}(u)$$

一般に harmonic map は連続点の近傍では C^∞ 級となることが Schön によって示されている. [22]
一方次の Schön-Uhlenbeck の結果により, E.M.M. の特異集合はあまり大きくないことがわかる.

Theorem 1 [23]
$n \geq 3$ のとき, $u \in W^{1,2}(M^n, N^k)$ が energy minimizing map ならば,
$\dim_{\mathcal{H}} \mathrm{Sing}(u) \leq n - 3$
さらに, $n = 3$ のときは, Sing(u) は discrete

一方, H.M. では次のような興味深い結果が知られている.

Theorem 2 [21]
任意の non-constant である$\phi \in C^\infty(\partial\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ に対して, harmonic map $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ で $u|_{\partial\mathbb{B}^3} = \phi$ かつ $\mathrm{Sing}(u) = \overline{\mathbb{B}^3}$ となるものが存在する.

この事実によると, harmonic map であるという条件は, 正則性のためには弱い条件であるといえる. そこで, harmonic map の中でも特別なもの (正則性が期待できるもの) として次の stationary harmonic map を導入する.

Definition 4 (stationary harmonic map)
harmonic map $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ が *stationary harmonic map* であるとは, u が次を満すこととする.

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathbf{E}(u(x + t\psi(x))) = 0 \quad \text{for any } \psi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

harmonic map の方程式の導出における変分が値域での変分であったのに対して, stationary harmonic map での変分は定義域での変分と考えられる. energy minimizing map は stationary harmonic map であり, stationary harmonic map は harmonic map である. 逆は一般には成立しない. stationary harmonic map の正則性については次が成立する.

Theorem 3 [2], [6], [10]
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ が stationary harmonic map であるとする. このとき, Sing(u) について, $\mathcal{H}^{n-2}(\mathrm{Sing}(u)) = 0$ が成立する.

本講演の目的は, energy minimizing map 及び, harmonic map の孤立特異点の近傍での挙動についての解析について報告することである. 以下, §4 では, 3 次元領域から $\mathbb{S}^2$ への, §5 では, 4 次元領域から $\mathbb{S}^3$ への調和写像について述べていく.

3 Some tools

まず, 本講演で中心的な役割を果す, 写像度について述べておく.

Definition 5 (degree)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界領域で, $\Sigma = \partial\Omega$ は smooth で連結成分は 1 つとする. このとき, $u \in C^1(\Sigma, \mathbb{S}^{n-1})$ に対して, $\deg(u|_\Sigma)$ を次で定める.

$$\deg(u) = \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma)} \int_\Sigma J(u) d\mathcal{H}^{n-1}$$

ここで $J(u)$ は u の Jacobian とする. このとき, $\deg(u) \in \mathbb{Z}$ となる.

直感的には, 写像度とは定義域を 1 回転したとき, その像が値域を何回まわるかを (向きをこめて) 数えたものである. 次に harmonic map の孤立特異点での写像度を定める. 以下では, この写像度の決定が話題となる.

Definition 6 (degree at the isolated singular point)
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^{n-1})$ を harmonic map として, $p \in \Omega$ を, u の孤立特異点とする. このとき, $\deg(u,p)$ を次で定める.

$$\deg(u,p) = \deg(u|_{\partial \mathbb{B}_r(p)}) \quad (r > 0 : \text{small})$$

これは, $r > 0$ small にはよらない。

特異点のまわりでの写像度を考えることは, harmonic map に何の条件も仮定しない場合は、次のことより難しいと考えられる.

Theorem 4 [27]
$1 \le n \le 7$ ならば、$\pi_n(\mathbb{S}^n)$ は harmonic representation を持つ。つまり、任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して、harmonic map $u_d \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n)$ で写像度が k となるものが存在する。

これにより、$\mathbb{B}^{n+1}$ から $\mathbb{S}^n$ への写像 $\overline{u_d}$ を$\overline{u_d}(x) = u_d\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$ で定めると、$d \neq 0$ ならば、0 に写像度 d の孤立特異点を持つ調和写像が作れる。以下では、一般の harmonic map ではなく、何らかの条件のついたものを考える。
さて、孤立特異点での写像度について解析を行う際, そのままではかなりしんどいので、次の blow-up と呼ばれる操作を有効に用いる. まず, energy minimizing map, 及び stationary harmonic map の満す monotonicity と呼ばれるエネルギー等式について述べておく. (これは理論的には正則性の話題より前に来るべきものである.)

Theorem 5 (monotonicity) [8] [12] [23]
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ を, stationary harmonic map とする. $\mathbb{B}_\rho(a) \subset \mathbb{B}_R(a) \subset \Omega$ なるとき, 次の等式が成立する.

$$R^{2-n} \int_{\mathbb{B}_R(a)} |\nabla u|^2 \, dx - \rho^{2-n} \int_{\mathbb{B}_\rho(a)} |\nabla u|^2 \, dx = 2 \int_{\mathbb{B}_R(a) \setminus \mathbb{B}_\rho(a)} r_a^{2-n} \left| \frac{\partial u}{\partial r_a} \right|^2 dx$$

ここで $r_a = |x - a|$ である.

特に次のエネルギー不等式を得る.

$$\rho^{2-n} \int_{\mathbb{B}_\rho(a)} |\nabla u|^2 \, dx \le R^{2-n} \int_{\mathbb{B}_R(a)} |\nabla u|^2 \, dx$$

ここで, scaling を行うことにより, 次を得る.

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla u_{a,\rho}|^2 \, dx \le \int_{\mathbb{B}^n} |\nabla u_{a,R}|^2 \, dx$$

よって, 部分列を取ることにより, $\{u_{a,\rho_j}\}_{j=1}^\infty$ は $W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^{k+1})$ において, 弱収束するとしてよい. ここで, $\rho_j \to 0$ $(j \to 0)$ である. さらに u が energy minimizing map, a が孤立特異点ならば, 次が言える.

Theorem 6 (blow-up) [23, 8, 12, 26]
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ を energy minimizing map として, $a \in \Omega$ を u の孤立特異点とする. このとき, ある energy minimizing map $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^k)$ が存在して, 次を満たす.
(1) $u_{a,\rho} \to u_0$ weakly in $W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^{k+1})$ $(\rho \to 0)$
(2) $u_{a,\rho} \to u_0$ in $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^{k+1})$ $(\rho \to 0)$
(3) $u_{a,\rho} \to u_0$ in $C^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n \backslash \{0\}, \mathbb{R}^{k+1})$ $(\rho \to 0)$ for any $l \in \mathbb{N}$
(4) $\mathrm{Sing}(u_0) = \{0\}$
(5) $\dfrac{\partial u_0}{\partial r} = 0$ in $\mathbb{B}^n \backslash \{0\}$
(6) $\deg(u_0, 0) = \deg(u, a)$

以上の操作を blow-up と呼び、u_0 を u の a における blow-up limit と呼ぶ。
よって, energy minimizing map の 孤立特異点での写像度の問題は球面間の harmonic maps の分類と密接に関係する. 一方, stationary harmonic map でもこのようなことが成立するかというと, 一般には成立しない. 但し, 安定性についての条件があれば, 成立する場合がある.

Definition 7 (stability)
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ を stationary harmonic map とする. このとき, u が 弱安定であるとは, u が次を満たすことをいう.

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathbf{E}(u_t) \geq 0 \quad \left(u_t = \frac{u + t\phi}{|u + t\phi|}\right)$$

for any $\phi \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^{k+1})$ with $\phi \cdot u = 0$ (in $\Omega \backslash \mathrm{Sing}(u)$)
第二変分を具体的に書くと, 次のようになる。

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathbf{E}(u_t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 |\phi|^2 \, dx$$

Theorem 7 (blow-up 2) [4] [5]
$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^k)$ $(k \geq 3)$ を stable stationary harmonic map として, $a \in \Omega$ を u の孤立特異点とする. このとき, 列 $\{\rho_j\}_{j=1}^\infty, \rho_j \to 0$ 及び, stable stationary harmonic map u_0 が存在して以下を満す.
(1) $u_{a,\rho_j} \to u_0$ weakly in $W^{1,2}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^{k+1})$ $(j \to \infty)$
(2) $u_{a,\rho_j} \to u_0$ in $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^{k+1})$ $(j \to \infty)$
(3) $u_{a,\rho_j} \to u_0$ in $C^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n \backslash \{0\}, \mathbb{R}^{k+1})$ $(j \to \infty)$ for any $l \in \mathbb{N}$
(4) $\mathrm{Sing}(u_0) = \{0\}$
(5) $\dfrac{\partial u_0}{\partial r} = 0$ in $\mathbb{B}^n \backslash \{0\}$
(6) $\deg(u_0, 0) = \deg(u, a)$

Remark 3 この場合、blow-up limit が unique かどうかは open である。

§4, §5 では、斉次な harmonic map について扱う。実際，上の Theorems より、この場合を考察すれば、十分である。

4 Harmonic maps from $\mathbb{B}^3$ into $\mathbb{S}^2$

この section では、$\mathbb{B}^3$ から $\mathbb{S}^2$ への斉次な harmonic map について扱う。$u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ を，harmonic map で、$\mathrm{Sing}(u) = \{0\}$ なるものとし、さらに斉次であるとする。このとき、harmonic map $u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ が存在して、次を満たす。

$$u(x) = u_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{in } \mathbb{B}^3 \backslash \{0\}. \tag{4.1}$$

そこで、もし $\mathbb{S}^2$ から $\mathbb{S}^2$ への harmonic map が分類できていればもとの問題は非常に見とおしが良いわけである。実際，その分類は完全に行われている。

Theorem 8 $u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ を harmonic map とする。このとき、ある多項式 P, Q が存在して以下を満たす。

$$(1)\ u_0 = \pi^{-1} \circ \frac{P(z)}{Q(z)} \circ \pi \quad or \quad (2)\ u_0 = \pi^{-1} \circ \frac{P(\overline{z})}{Q(\overline{z})} \circ \pi \tag{4.2}$$

ここで、$\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ は stereo graphic projection とする。さらにこのとき、u_0 の degree は次で与えられる。

$$|\deg(u_0)| = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

但しここで、P, Q は既約であるとする。逆に (1), (2) で与えられる写像 u_0 は全て harmonic map となる。
さらにこのような u_0 のエネルギーは次で与えられる。

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{\mathbb{S}^2} u_0|^2 \, d\omega = 4\pi |\deg(u_0)|$$

よって非常に直接的な方法として、このような $\mathbb{S}^2$ から $\mathbb{S}^2$ への harmonic map のうち、斉次拡張したときに、どのようなものが energy minimizing map となるかを調べればよい。勿論これは大変なのではあるが、これに成功したのが Brezis-Coron-Lieb であって彼等は次を得ている。

Theorem 9 [3]
$u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)$ を harmonic map として，$u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ を

$$u(x) = u_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{in } \mathbb{B}^3 \backslash \{0\}.$$

で定める。このとき、もし u が energy minimizing map となるならば、ある $A \in O(3)$ が存在して、次が成立する。

$$u(x) = A\frac{x}{|x|} \quad \text{for } x \in \mathbb{B}^3\backslash\{0\}$$

上の定理から分かることは、もし $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$ が energy minimizing map であり、$a \in \mathrm{Sing}(u)$ ならば、$\deg(u, a) = \pm 1$ となることである。さて次に、non-minimum な harmonic map について考えることにする。すると，次が成立する。

Theorem 10 [14]
任意の $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ に対して、ある stable harmonic map $u_d \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ で次を満たすものが存在する。
(1) $\mathrm{Sing}(u) = \{0\}$.
(2) $\deg(u, 0) = d$.
(3) $\dfrac{\partial u_d}{\partial r} = 0 \quad \text{in } \mathbb{B}^4\backslash\{0\}$

この定理は次の非常に興味深い Proposition を用いて示される。

Proposition 1 [3]
任意の $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ に対して、X_d を次で定める。

$$X_d = \{v \in C^\infty(\mathbb{B}^3\backslash\{0\}, \mathbb{S}^2) |\ \deg(u, 0) = d\}$$

このとき、次の等式が成立する。

$$\operatorname*{Inf}_{v \in X_d} \mathbf{E}(v) = 4\pi|d|$$

さて，Proposition 1 を認めて、Theorem 10 を示そう。

Proof of Theorem 10
$u_0 = \pi^{-1} \circ z^d \circ \pi$ とする。このとき、u_0 は $\mathbb{S}^2$ から $\mathbb{S}^2$ への harmonic map となる。そして、 $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ を斉次拡張とする。つまり、

$$u(x) = u_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{in } \mathbb{B}^3\backslash\{0\}$$

このとき、u は harmonic map であり、以下が成立する。

$$\mathrm{Sing}(u) = \{0\}, \quad \deg(u, 0) = d, \quad \mathbf{E}(u) = 4\pi|d|$$

$\phi \in C_0^1(\mathbb{B}^3, \mathbb{R}^3)$ with $u \cdot \phi = 0$ として、u_t を次で定める。

$$u_t = \frac{u + t\phi}{|u + t\phi|}$$

このとき、$u_t \in C^\infty(\mathbb{B}^3\backslash\{0\},\mathbb{S}^2)$ であり、$\deg(u,0)=d$ である。さらに、$0<r<1$ に対して、$u_t(r) \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3,\mathbb{S}^2)$ を次で定める。

$$u_t(r)(x) = u_t\left(r\frac{x}{|x|}\right)$$

このとき、以下を得る。

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(u_t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3} |\nabla u_t|^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3} \left|\frac{\partial u_t}{\partial r}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_{\mathbb{S}^2} u_t|^2\,d\omega\,dr \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3} \left|\frac{\partial u_t}{\partial r}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{B}^3} |\nabla u_t(r)|^2\,dx\right) dr \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3} \left|\frac{\partial u_t}{\partial r}\right|^2 dx + 4\pi|d|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで、(4.3) の最右辺と最左辺は、$t=0$ のとき、ともに最小値 $4\pi|d|$ をとる。よって次を得る。

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{E}(u_t)\right|_{t=0} &\geq \left.\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}\left|\frac{\partial u_t}{\partial r}\right|^2 dx\right)\right|_{t=0} \\
&= \int_{\mathbb{B}^3} \left.\left\{\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_t}{\partial t}\right)\right|^2 + \left(\frac{\partial u_t}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2}\right)\right)\right\}\right|_{t=0} dx \\
&= \int_{\mathbb{B}^3} \left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\left.\frac{\partial u_t}{\partial t}\right|_{t=0}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{B}^3} \left|\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{B}^3} r^{-2}|\phi|^2\,dx \geq 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ここで最後から 2 番めは、Hardy の不等式。
よって、u は安定である。 ∎

以上、Theorem 9 と Theorem 10 を比べると、3 次元領域から 2 次元球面への harmonic map の場合、stable non-minimum のときと、energy minimizing のときでは、孤立特異点の近傍での挙動は大きく異なることがわかる。

5 Harmonic maps from $\mathbb{B}^4$ into $\mathbb{S}^3$

ここでは、前 section より丁度 1 次元上の場合である、$\mathbb{B}^4$ から、$\mathbb{S}^3$ への harmonic map について考察する。前 section と同様にして、斉次な harmonic map を考えるわけで

あるが、状況は全く異なってくる。まず第一に、$\mathbb{S}^3$ から $\mathbb{S}^3$ への harmonic maps の分類は得られていない。第二に、この場合 harmonic map の具体的な例は殆ど知られていない。よって、ほとんど手探りの作業が出来ないわけである。　また、Proposition 1 のようなことも起こり得ない。実際、次のような例がある。$u_\lambda \in C^\infty(\mathbb{B}^4\backslash\{0\}, \mathbb{S}^3)$ を次で定める。$(\lambda > 0)$

$$u_\lambda = \pi^{-1} \circ \lambda \circ \pi$$

このとき, $\deg(u_\lambda, 0) = 1$ である。一方、エネルギーについては、次が成立する。

$$\operatorname*{Inf}_{\lambda>0} \mathbf{E}(u_\lambda) = 0$$

よって基本的に、前 section で用いた方法は全く適用できないと考えられる。ところが、ある特殊な事情により孤立特異点での写像度は、（ある程度）解析できる。

Theorem 11 (N)
$u \in C^\infty(\mathbb{B}^4\backslash\{0\}, \mathbb{S}^3)$ を $\mathrm{Sing}(u) = \{0\}$ かつ斉次な stable harmonic map とする。
このとき、$\deg(u)$ は、0 又は ± 1 となる。
さらに, もし ± 1 のときは, ある $A \in O(4)$ が存在して、次を満たす。

$$u(x) = A\frac{x}{|x|} \text{ for } x \in \mathbb{B}^4\backslash\{0\}$$

ここで、$\mathbb{B}^3$ から $\mathbb{S}^2$ のときと決定的に異なるのは、写像度の絶対値が 2 以上ならば、安定にはなり得ないということである。さらに、安定性を仮定すれば、形状がかなり制限されるということである。ただし残念ながら、写像度が 0 となるような例が実際に存在するかどうかはわかっていない。
証明は特殊な事情により、大変簡単である。まず鍵となる不等式を用意する.

Lemma 1 $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ を安定な harmonic map とする。このとき、次の不等式が成立する。

$$\frac{1}{3}\int_{\mathbb{B}^4} |\nabla u|^2 |f|^2\, dx \le \int_{\mathbb{B}^4} |\nabla f|^2\, dx \quad \text{for any } f \in C_0^1(0,1) \tag{5.1}$$

Proof of Lemma 1
まず、安定性の不等式において、直行性の条件をはずす。$\forall\phi \in C_0^1(\mathbb{B}^4, \mathbb{R}^4)$ に対して、$\tilde{\phi}$　を次で定める。

$$\tilde{\phi} = \phi - (u, \phi)u$$

これを安定性の式に代入する。

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \int_{\mathbb{B}^4} |\nabla u|^2 \{|\phi|^2 - (u,\phi)^2|\}\, dx \\
\text{RHS} &= \int_{\mathbb{B}^4} \Big\{ |\nabla\phi|^2 + |\nabla u^2|(u,\phi)^2 + |\nabla(u,\phi)|^2 - 2(u,\phi)(\nabla u, \nabla\phi) \\
&\quad -2\sum_{\alpha=1}^4 \left(u, \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)^2 - 2\sum_{\alpha=1}^4 \left(u, \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \phi\right) \Big\}\, dx
\end{aligned}$$

あわせて、次を得る。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}^4} |\nabla u|^2|\phi|^2\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{B}^4} |\nabla\phi|^2\,dx + 2\int_{\mathbb{B}^4} |\nabla u|^2(u,\phi)^2\,dx + \int_{\mathbb{B}^4} |\nabla(u,\phi)|^2\,dx \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{B}^4} (u,\phi)(\nabla u,\nabla\phi)\,dx - 2\int_{\mathbb{B}^4} \sum_{\alpha=1}^{4}\left(u,\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{B}^4} \sum_{\alpha=1}^{4}\left(u,\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha},\phi\right) dx
\end{aligned}$$

ここで、$1 \leq l \leq 4$ 及び，$f \in C_0^1(\mathbb{B}^4)$ に対して、$\phi = fe_l$ とする。すると次を得る。

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}^4} |\nabla u|^2 f^2\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{B}^4} |\nabla f|^2\,dx + 2\int_{\mathbb{B}^4} |u^l|^2|\nabla u|^2 f^2\,dx + \int_{\mathbb{B}^4} \{|u^l|^2|\nabla f|^2 + |\nabla u^l|^2 f^2\}\,dx \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{B}^4} f\sum_{\alpha=1}^{4} u^l \frac{\partial u^l}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,dx - 2\int_{\mathbb{B}^4} |u^l|^2|\nabla f|^2\,dx
\end{aligned}$$

これを l について 1 から 4 まで足しあわせて，求める不等式をえる。 ∎

上の定理より、斉次で安定な harmonic map については、エネルギー評価が得られる。

Lemma 2 $u \in C^\infty(\mathbb{B}^4\backslash\{0\},\mathbb{S}^3)$ を斉次で安定な harmonic map とする。そして、$u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^3,\mathbb{S}^3)$ を、

$$u(x) = u_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{B}^4\backslash\{0\}$$

となる写像とする。このとき、次のエネルギー評価が成立する。

$$\int_{\mathbb{S}^3} |\nabla_{\mathbb{S}^3} u_0|^2\,d\omega \leq 3\omega_3$$

ここで、$\omega_3 = \mathcal{H}^3(\mathbb{S}^3)$

Proof of Lemma 2

(5.1) において、$f \in C_0^1(0,1)$ を、radial にのみ依存する関数とする。すると、次を得る。

$$\frac{1}{3}\left(\int_{\mathbb{S}^3} |\nabla_{\mathbb{S}^3} u_0|^2 d\omega\right)\left(\int_0^1 rf^2\,dr\right) \leq \omega_3\int_0^1 r^3|f'|^2\,dr$$

これと、Hardy の不等式の best constant より、求める評価を得る。 ∎

Remark 4 ここで注意すべきことは, $n=3$ のときは Lemma 1 と同様にして得られる不等式は

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla f|^2 \, d\omega \geq 0 \quad \text{for any } f \in C_0^1(\mathbb{B}^3)$$

という自明な不等式であり, これからエネルギー評価は得られないことである. 実際, $n=3$ ならば section 3 で述べたように, エネルギーの高い斉次な stable harmonic map が存在している. よって, Lemma 1 における不等式が $n=3$ と $n=4$ の差を表しているように思われる.

一方, エネルギーの下からの評価も得ることが出来る. それには次の補題を用いることになる.

Theorem 12

$$G = \{g \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) | \text{orientation preserving conformal diffeomorphism}\}$$

とする。$(n \geq 2, k \geq 2)$ また、$u_0 \in C^\infty(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3)$ を harmonic map とする。このとき、次が成立する。

$$\mathbf{E}(u_0) = \operatorname*{Sup}_{g \in G} \mathbf{E}(u_0 \circ g)$$

定理の証明はこの補題と, Poincaré の不等式の best constant が 3 であることを用いて各成分が $\mathbb{S}^3$ 上の non-zero first eigenvalue の一次結合で書けることから得られる.

References

[1] A. Baldes, *Stability and uniqueness properties of the equator map from a ball into an ellipsoid.* Math. Z. **185** (1984), 505–516.

[2] F. Bethuel, *On the singular set of stationary harmonic maps.* Manuscripta Math. **78** (1983), 417–443

[3] H. Brezis, J. M. Coron, E. Lieb, *Harmonic maps with defects.* Comm. Math. Phys. **107**, (1986), 649–705.

[4] M. C. Hong, *On the Hausdorff dimension of the singular set of stable stationary harmonic maps* Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), 1967-1985

[5] M. C. Hong, C. Wang, *On the singular set of stable stationary harmonic maps.* Calc. Var. **9**, (1999), 141–156.

[6] L. C. Evans, *Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres.* Arch. Rational Mech. Anal. **116**, (1991), 101–113.

[7] R. Hardt, *Singularities of harmonic maps.* Bull. Amer. Math. Soc. **34**, (1997), 15–34.

[8] R. Hardt, F. H. Lin, *Mappings minimizing the L^p norm of the gradient.* Comm. Pure Appl. Math.**40**, (1987), 555–588

[9] R. Hardt, L. Mou, *Harmonic maps with fixed singular sets.* J. Geom. Anal. **2**, (1992), 445–488.

[10] F. Hélein, *Regularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphere.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311**, (1990), 519–524

[11] F. H. Lin, *Une remarque sur l'application $x/|x|$.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305**, (1987), 529–531.

[12] S. Luckhaus, *Partial Hölder continuity for minima of certain energies among maps into a Rimannian manifold.* Indiana Univ. Math. J. **37**, (1988), 349-367.

[13] C. B. Morrey, Jr, *Multiple integrals in the calculus of variations.* Springer Berlin-Heidelberg-New York. 1966

[14] L. Mou, *Harmonic maps with prescribed finite singularities.* Comm. Partial Differential Equations **14**, (1989), 1509–1540.

[15] T. Nakajima, *Stability of the energy minimizing map $x/|x|$.* to appear in Comm. Partial Differential Equations

[16] T. Nakajima, *Stability and singularity of harmonic maps into $\mathbb{S}^3$.*, preprint

[17] T. Okayasu, *Regularity of minimizing harmonic maps into $\mathbb{S}^4, \mathbb{S}^5$ and symmetric spaces.*, Math. Ann. **298**, (1994), 193–205.

[18] C. C. Poon, *Some new harmonic maps from $\mathbb{B}^3$ to $\mathbb{S}^2$.* J. Diff. Geom. **34**, (1991), 165–168.

[19] J. Qing, *Boundary regularity of weakly harmonic maps from surfaces.* J. Funct. Anal. **114** (1993), 458–466

[20] J. Ramanathan, *A remark on the energy of harmonic maps between spheres.* Rocky. Mount. J. Math. **16**, (1986), 783–790.

[21] T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic maps into spheres.*, Acta. Math. **175**, (1995), 197–226.

[22] R. Schön, *Analytic aspects of harmonic map problem.* Seminar on nonlinear partial differential equations 321–358 MSRI. Publ. **2**, Springer New York-Berlin 1984.

[23] R. Schön, K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps.* J. Diff. Geom. **17**, (1982), 307–335.

[24] R. Schön, K. Uhlenbeck, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic.* J. Diff. Geom. **18**, (1983), 253–268.

[25] R. Schoen, K. Uhlenbeck, *Regularity of minimizing harmonic maps into the sphere.* Invent. Math. **78**, (1984), 89–100.

[26] L. Simon, *Theorems on the regularity and singularity of energy minimizing maps.* ETH Lectures in Mathematics Series, Birakhauser, 1996

[27] R. T. Smith, *Harmonic mappings of spheres.* Amer. J. Math. **97**, (1975), 364–385

[28] C. Wang, *Boundary partial regularity for a class of harmonic maps.* Comm. Partial Differential Equations **24**, (1999), 355–368